На правах рукописи

СЕДАЛИЩЕВ ВЛАДИМИР ВИКТОРОВИЧ

КОНСТАНТЫ ОЦЕНОК СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ ФОН НЕЙМАНА И БИРКГОФА

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Новосибирского государственного университета.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент
Качуровский Александр Григорьевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
Малюгин Сергей Артемьевич

кандидат физико-математических наук, доцент
Рубан Анатолий Альбертович

Ведущая организация:

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет

Защита состоится "15" февраля 2012 г. в 16.00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН (630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан "[illegible]" января 2012 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета — А. Е. Гутман

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ — пространство с вероятностной мерой, на котором в случае рассмотрения дискретного типа времени определён эндоморфизм T, а в случае непрерывного — полупоток $\{T^t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ введём эргодические средние:

$$A_t f(\omega) = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t-1} f(T^k\omega)\ ,\ t \in \mathbb{N} \text{ и } A_t f(\omega) = \frac{1}{t}\int_0^t f(T^\tau\omega)\, d\tau\ ,\ t \in \mathbb{R}^+$$

для случаев дискретного и непрерывного параметра времени t соответственно.

Через U_T^t обозначим изометрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ по формуле $U_T^t f = f \circ T^t$. Выражение $b_t f = (U_T^t f, f)$ в случае дискретного параметра времени t определяет корреляционные коэффициенты, а в случае непрерывного — корреляционную функцию. Через σ_f будем обозначать соответствующую спектральную меру, отвечающую f.

В случае $f \in L_1(\Omega)$ индивидуальная теорема Биркгофа утверждает существование λ-п.в. предела:

$$f^*(\omega) = \lim_{t\to\infty} A_t f(\omega),$$

и равенство $\int\limits_\Omega f(\omega)\, d\lambda(\omega) = \int\limits_\Omega f^*(\omega)\, d\lambda(\omega)$. Статистическая эргодическая теорема фон Неймана гарантирует в случае $f \in L_2(\Omega)$ существование того же предела $\lim\limits_{t\to\infty} A_t f$ в смысле нормы пространства $L_2(\Omega)$, причём этот предел λ-п.в. равен f^*.

Скорость сходимости будем измерять для эргодической теоремы фон Неймана как скорость сходимости к нулю при $t \to \infty$ числовых величин $\|A_t f - f^*\|_2^2$, для эргодической теоремы Биркгофа — как скорость сходимости к нулю числовых величин $P_t^\varepsilon = \lambda\left\{\sup\limits_{s\geq t} |A_s f - f^*| \geq \varepsilon\right\}$, поскольку сходимость для любого $\varepsilon > 0$ при $t \to \infty$ величины P_t^ε к нулю эквивалентна сходимости п.в. $A_t f$ к f^*.

Известно[1], что впервые вопрос о скоростях сходимости в эргодических теоремах рассматривался Дж. фон Нейманом[2] в 1932 г. Было замечено, что оригинальное доказательство статистической эргодической

---

[1] Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // УМН. 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.

[2] Neumann, J. von. Physical applications of the ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1932. V. 18, N 3. P. 263–266.

теоремы даёт возможность «численно оценить скорость сходимости», в то время как из доказательства Дж. Биркгофа индивидуальной эргодической теоремы подобная информация не извлекается.

В 1975 г. В. Ф. Гапошкин показал[3], что скорость сходимости в теореме фон Неймана с дискретным временем, за исключением тривиального случая $f - f^* = 0$ п.в., не может быть быстрее квадратичной, в тоже время квадратическая скорость достигается только[4] на когомологичных нулю функциях $f - f^*$, т.е. функциях вида $f - f^* = g \circ T - g$, где $g \in L_2(\Omega)$. Несмотря на ограниченность диапазона скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана, специалистам хорошо известно[5], что «невозможно получить сколько-нибудь общие, т.е. зависящие только от усредняемой функции f, оценки этих скоростей». Первые примеры в этом направлении были построены во второй половине 1970-х годов Г. Халашем и У. Кренгелем.

Это привело к необходимости получения оценок зависящих от пар (f,T) при разумных постановках вопроса. В 1970–1980 гг. В.В. Петров и В.Ф. Гапошкин оценивали асимптотику $|A_n f - f^*|$ по скорости убывания корреляционных коэффициентов $\{b_n(f - f^*)\}_{n=1}^{\infty}$, а также по тесно с ней связанной скорости убывания $\|A_n f - f^*\|_2^2$. Впоследствии у В.Ф. Гапошкина[6] оценки В.В. Петрова приобрели законченный вид: была оценена асимптотика $|A_n f - f^*|$ для пар (f,T), удовлетворяющих условию $b_n(f - f^*) = O(n^{-\alpha}(\ln n)^{-\beta}(\ln\ln n)^{-\gamma})$, а также для пар (f,T), удовлетворяющих условию $\|A_n f - f^*\|_2^2 = O(n^{-\alpha}(\ln n)^{-\beta}(\ln\ln n)^{-\gamma})$. Отметим также, что в начале 1960-х В.П. Леоновым приводились оценки[7] с точностью $o(n^{-2})$ скорости сходимости в теореме фон Неймана для пар (f,T), удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |kb_k(f - f^*)| < \infty$.

В 1996 г. А.Г. Качуровским[5] при $f \in L_2(\Omega)$ были получены оценки скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана с дискретным временем по следующим характеристикам пары (f,T): особенности в нуле спектральной меры σ_{f-f^*} элемента $f - f^*$ относительно соот-

[3] Гапошкин В. Ф. Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, № 6. С. 1366–1392.

[4] Browder F. On the iteration of transformations in noncompact minimal dynamical systems // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V. 9, N 5. P. 773–780.

[5] Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // УМН. 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.

[6] Гапошкин В. Ф. О зависимости скорости в усиленном законе больших чисел для стационарных процессов от скорости убывания корреляционной функции // ТВП. 1981. Т. 26, № 4. С. 720–733.

[7] Леонов В.П. О дисперсии временных средних стационарного случайного процесса // ТВП. 1961. Т. 6, № 1. С. 93–101.

ветствующей динамической системы, корреляционным коэффициентам $\{b_n(f - f^*)\}_{n=1}^{\infty}$, а в случае оценки скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа, помимо упомянутых характеристик, ещё и по последовательности $\{\|A_n f - f^*\|_2^2\}_{n=1}^{\infty}$, измеряющей скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана. Таким образом, информацию о скоростях сходимости в эргодических теоремах удаётся извлекать из свойств меры σ_{f-f^*} (например, из её концентрации в окрестности нуля) и свойств её коэффициентов Фурье, т.е. корреляционных коэффициентов (например, по скорости их убывания к нулю).

Отметим, что все обсуждавшиеся до этого результаты по скоростям сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа были доказаны только в терминах "O" и "o" и носили характер указания связей между скоростями (измеряемыми как "O" и "o" от функций, выбранных из каких-либо соображений удобства) стремления к нулю различных характеристик динамических систем ($b_t(f - f^*)$, P_t^ε, $\|A_t f - f^*\|_2^2$ и др.). В силу одного из эквивалентных определений символа Э. Ландау "O", оценка $\Phi(t) = O(\varphi(t))$ равносильна выполнению неравенства $|\Phi(t)| \leq A|\varphi(t)|$ с некоторой положительной константой A при соответствующих смыслу исследуемой задачи ограничениях на t. Тогда рассмотренные ранее результаты гарантируют наличие функциональных связей между константами (возникающими из упомянутого определения символа "O") оценок скоростей сходимости в эргодических теоремах, а также константами оценок скорости стремления к нулю принятых к рассмотрению параметров динамических систем, ответственных за скорости сходимости.

Цель работы. Диссертация посвящена нахождению разумных функциональных связей между теми или иными константами оценок, возникших у предшественников автора при исследовании скоростей сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа. «Разумность» здесь понимается в том смысле, чтобы можно было удовлетворить естественным образом возникающую потребность в переходе от асимптотических оценок к алгебраическим для получения возможности численной оценки скорости сходимости в эргодических теоремах. Получение неравенств, позволяющих численно оценить скорости сходимости — ещё одна цель этой работы.

Научная новизна. Полученные в диссертации новые результаты можно разделить на следующие группы:

1) В случае динамических систем с дискретным временем в спектральном критерии Качуровского степенной скорости сходимости в эр-

годической теореме фон Неймана были найдены две функциональные связи (число связей для анализа равно числу импликаций в формулировках первоначальных теорем предшественников в терминах "O" или "o") между соответствующими константами, возникшими из определения "O", причём было показано, что одна из этих связей не улучшаема. Тем самым критерий Качуровского был уточнён в сторону перехода от "O" и "o" к алгебраическим неравенствам, одно из которых в общем случае не улучшаемо. Также было доказано, что эти функциональные связи констант носят абсолютный характер, в том смысле, что явным образом не зависят от функции f, по которой производится усреднение. Был разобран и общий (не обязательно степенной) случай: получено двойное неравенство, связывающее $\|A_n f - f^*\|_2^2$ и поведение в нуле меры σ_{f-f^*}.

2) Получены уточняющие результаты В.П. Леонова неравенства, связывающие $\|A_n f - f^*\|_2^2$ и $\{b_n(f - f^*)\}_{n=1}^{\infty}$ при различных предположениях относительно $\{b_n(f - f^*)\}_{n=1}^{\infty}$. Эти соотношения позволяют оценивать скорость сходимости в теореме фон Неймана с дискретным временем при наличии информации о корреляционных коэффициентах. Применение полученных соотношений в важных для потенциальных приложений частных случаях степенного и экспоненциального убывания корреляций позволило получить численные оценки скорости сходимости в статистической теореме.

3) Для случаев дискретного и непрерывного времени получены неравенства, связывающие соответствующие константы оценок скорости сходимости в эргодических теоремах, которые позволили оценить скорость сходимости в эргодической теореме Биркгофа по известной скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана. Эти неравенства являются уточнением соответствующих результатов В.Ф. Гапошкина, в направлении перехода от "O" и "o" к неравенствам с конкретными константами, с дальнейшим их переносом на случай непрерывного времени. Это позволило в совокупности с результатами из предыдущих глав указать путь получения численных оценок скорости сходимости в индивидуальной теореме при наличии знаний о поведении корреляций $b_t(f - f^*)$ или характере поведения в нуле меры σ_{f-f^*}. Все основные результаты диссертации имеют очевидные точные аналоги для стационарных в широком смысле стохастических процессов.

Методы исследования. В работе используются методы эргодической теории, теории меры, гармонического анализа, теории стохастических процессов, а также общих разделов функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Предлагаемая работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в эргодической теории и смежных областях знания.

Апробация. Результаты диссертации докладывались:

— на Международной конференции «Современные проблемы анализа и геометрии» в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН (сентябрь 2009 г.);

— на XLVIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» в Новосибирском государственном университете (апрель 2010 г.);

— на Международной конференции по эргодической теории в Университете Северной Каролины в г. Чапел-Хилл, США (март 2011 г.);

— на семинаре «Динамические системы и эргодическая теория» под руководством Д. В. Аносова и А. М. Стёпина в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова (апрель 2011 г.);

— на семинаре «Теория вероятностей и эргодическая теория» под руководством Б. М. Гуревича и В. И. Оселедца в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, в рамках Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2011» (апрель 2011 г.);

— на Международной школе-конференции по геометрии и анализу в Кемеровском государственном университете (июнь 2011 г.);

— на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» под руководством И. А. Тайманова в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН (ноябрь 2011 г.);

— на семинаре отдела анализа и геометрии под руководством Ю. Г. Решетняка в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН (декабрь 2011 г.).

За результаты, вошедшие в диссертационную работу, автору были присуждены: стипендия имени член-корреспондента А. А. Ляпунова (2009 г.), диплом первой степени XLVIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирский государственный университет, 2010 г.), стипендия имени академика О. А. Ладыженской (2011 г.), грамота за представление лучшего доклада на XVIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 2011 г.), а также диплом Лаврентьевского конкурса студенческих и аспирантских работ по математике и механике (2011 г.).

Публикации. Имеются семь публикаций автора по теме диссертации: [1]–[7], из них четыре — в соавторстве с А. Г. Качуровским: [3]–[4] и [6]–[7]. Вклад авторов в упомянутых четырёх работах равноценен и не делим.

Структура и объем диссертации. Структурно работа состоит из введения, четырёх глав и списка литературы. Каждая из глав разбита на разделы. Каждый из разделов при необходимости делится на пункты. Нумерация теорем, лемм и замечаний сквозная. Нумерация формул также сквозная, и нумеруются только формулы, которые считаются наиболее важными и на которые в дальнейшем в тексте есть ссылка.

Объем работы – 64 страницы; библиография – 42 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обсуждается проблематика, приводятся необходимые для дальнейшего определения и даётся краткий обзор результатов, полученных в диссертации.

Глава 1. Численные оценки скорости сходимости в теореме фон Неймана при наличии информации о спектральной мере

Скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана не может быть произвольной: соотношение $\|A_t f - f^*\|_2^2 = o(t^{-2})$ при $t \to \infty$ может иметь место лишь при $f - f^* = 0$ λ-п.в. В случае дискретного времени это было доказано В.Ф. Гапошкиным[8] в 1975 г. В случае непрерывного времени доказательство можно провести похожим на дискретный случай способом[9]. Таким образом, степенной скорости сходимости с показателем степени $\alpha > 2$ не бывает, за исключением упомянутого вырожденного случая $f - f^* = 0$ λ-п.в.

Рассмотрим подробнее то, что известно об оставшемся диапазоне $\alpha \in [0,2]$. Для $\alpha \in [0,2)$ выполнен критерий А.Г. Качуровского, т.е. эквивалентность соотношения $\|A_t f - f^*\|_2^2 = O(t^{-\alpha})$ при $t \to \infty$ соотношению $\sigma_{f-f^*}(-\delta,\delta] = O(\delta^\alpha)$ при $\delta \to 0$. Для $\alpha = 2$ эта эквивалентность не имеет места для обоих типов времени.

[8]Гапошкин В. Ф. Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, № 6. С. 1366–1392.

[9]Джулай Н. А., Качуровский А. Г. Константы оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1039–1052.

Сосредоточимся далее на случае дискретного времени. Следующая ниже теорема показывает зависимость между скоростью сходимости в теореме фон Неймана с дискретным временем и поведением в нуле меры σ_{f-f^*}.

Теорема 4 ([4]). *Положим* $S_k = \sigma_{f-f^*}(-\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k}]$, $\sigma_k = S_k - S_{k+1} = \sigma_{f-f^*}\{(-\frac{\pi}{k}; -\frac{\pi}{k+1}] \cup (\frac{\pi}{k+1}; \frac{\pi}{k}]\}$. *Тогда для всех натуральных* n *справедливо двойное неравенство:*

$$\frac{4}{\pi^2}S_n \le \|A_n f - f^*\|_2^2 \le \frac{1}{n^2}\left(S_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)S_k\right) = S_n + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^2\sigma_k.$$

Отметим, что похожие неравенства, с другими константами, использовались ранее в работах В.Ф. Гапошкина[10]. В случае непрерывного времени справедливо аналогичное утверждение, доказанное в 2011 г. Н.А. Джулаем и А.Г. Качуровским[11].

Если в критерии А.Г. Качуровского воспользоваться одним из определений символа "O", то получим эквивалентность существования двух констант A и B, для которых одновременно справедливы неравенства:

1) $(\forall \delta \in [0, \pi])$: $\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \le A\delta^\alpha$;

2) $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\|A_n f - f^*\|_2^2 \le Bn^{-\alpha}$.

Естественным образом возникает вопрос о характере функциональной связи между константами A и B, т.е. о характере зависимостей $A = A(B)$ и $B = B(A)$. То, что такие зависимости существуют, следует из упоминавшейся эквивалентности существования констант A и B в силу критерия А.Г. Качуровского.

Следующая ниже теорема в случае дискретного времени предъявляет в явной форме зависимости $A = A(B)$ и $B = B(A)$, оказывающиеся достаточно «разумными», причём представленная в теореме зависимость $A = A(B)$, оказывается в определённом смысле не улучшаемой — в общем случае, при фиксированной константе B, константу $A = A(B)$ нельзя уменьшить. Данную теорему можно рассматривать как уточнение критерия А.Г. Качуровского в направлении перехода от "O" и "o" к алгебраическим неравенствам. Никакие ограничения на спектральные меры (абсолютная непрерывность и т.п.) здесь не накладываются.

Теорема 6 ([4]). *Пусть* $\alpha \in [0, 2)$. *Тогда:*

---

[10] Гапошкин В. Ф. О скорости убывания вероятностей ε-уклонений средних стационарных процессов // Матем. заметки. 1998. Т. 64, № 3. С. 366–372.

[11] Джулай Н. А., Качуровский А. Г. Константы оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1039–1052.

1. Если спектральная мера σ_{f-f^*} имеет степенную особенность в нуле, т.е. если для некоторой положительной константы A при всех $\delta \in (0, \pi]$ выполняется неравенство $\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \le A\delta^\alpha$, то скорость сходимости эргодических средних $A_n f$ — степенная с тем же показателем степени, т.е. для всех n

при $\alpha \in [0,1)$: $\|A_n f - f^*\|_2^2 < A\pi^\alpha \Big(\frac{2}{2-\alpha}n^{-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}n^{-1-\alpha} -$

$- \Big(\frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} - 2\Big)n^{-2} - n^{-2-\alpha}\Big) < A\pi^\alpha \Big(\frac{2}{2-\alpha}n^{-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}n^{-1-\alpha}\Big)$;

при $\alpha = 1$: $\|A_n f - f^*\|_2^2 < A\pi\left(2n^{-1} + \frac{\ln n}{n^2} - n^{-3}\right) < A\pi(2n^{-1} + \frac{\ln n}{n^2})$;

при $\alpha \in (1,2)$: $\|A_n f - f^*\|_2^2 < A\pi^\alpha \Big(\frac{2}{2-\alpha}n^{-\alpha} + \Big(4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\Big)n^{-2} -$

$- \Big(2 + \frac{1}{\alpha-1}\Big)n^{-1-\alpha} - n^{-2-\alpha}\Big) < A\pi^\alpha \Big(\frac{2}{2-\alpha}n^{-\alpha} + (4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1})n^{-2}\Big)$.

2. Если скорость сходимости эргодических средних $A_n f$ — степенная, т.е. если для некоторой положительной константы B при всех натуральных n выполняется неравенство $\|A_n f - f^*\|_2^2 \le Bn^{-\alpha}$, то спектральная мера σ_{f-f^*} имеет степенную особенность в нуле (с тем же показателем степени), т.е. для любого $\delta \in (0,\pi]$

$$\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \le C\delta^\alpha, \text{ где } C = \begin{cases} \frac{\pi^{2-\alpha}}{4}B, & 0 \le \alpha < 1 \\ \frac{\pi^{2-\alpha}}{2^{3-\alpha}}B, & 1 \le \alpha < 2 \end{cases},$$

причём константа C неулучшаема в том смысле, что её нельзя уменьшить.

Как известно, в случае абсолютной непрерывности меры σ_{f-f^*} с непрерывной в точке 0 плотностью ρ, справедливо асимптотическое соотношение

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = \|A_n(f - f^*)\|_2^2 = \mathrm{D}\, A_n(f - f^*) = 2\pi\rho(0)n^{-1} + o(n^{-1}). \quad (1)$$

Как очевидное следствие теоремы 6, получаем следующий аналог этого утверждения.

Замечание 1. Если мера σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна с плотностью $\rho \in L_\infty(-\pi,\pi]$, то $\|A_n f - f^*\|_2^2 < 2\pi\|\rho\|_\infty(2n^{-1} + \frac{\ln n}{n^2})$ для любого натурального n.

Глава 2. Численные оценки скорости сходимости в теореме фон Неймана при наличии информации о корреляциях

Как уже подробно обсуждалось в предыдущей главе, скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана полностью определяется поведением меры σ_{f-f^*} в окрестности нуля, а так как определение этой меры вводится через корреляционные коэффициенты $\{b_n(f-f^*)\}_{n=0}^{\infty}$ (для случая дискретного времени) или через корреляционную функцию $b_t(f-f^*)$ (в случае непрерывного времени), то не вызывает удивления факт возможности получения оценок скорости сходимости в зависимости от рассматриваемого типа времени через корреляционные коэффициенты $\{b_n(f-f^*)\}_{n=0}^{\infty}$ или корреляционную функцию $b_t(f-f^*)$.

Отметим, что в этой главе для получения оценок $\|A_nf-f^*\|_2^2$ скорости сходимости в теореме фон Неймана с дискретным временем будет использоваться формула, явно выражающая $\|A_nf-f^*\|_2^2$ через последовательность $\{b_n(f-f^*)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\|A_nf-f^*\|_2^2=\frac{1}{n^2}\sum_{|k|<n}(n-|k|)b_k(f-f^*).$$

Следующая ниже теорема даёт либо оценки для $\|A_nf-f^*\|_2^2$, либо даже тождества, оценивающие или выражающие $\|A_nf-f^*\|_2^2$ через всю совокупность $\{b_k(f-f^*)\}_{k=0}^{\infty}$ корреляционных коэффициентов при тех или иных предположениях о свойствах этих коэффициентов, уточняя тем самым ряд теорем предшественников соискателя.

Теорема 8 ([4]). *Справедливы следующие утверждения:*

1. $\|A_nf-f^*\|_2^2\le\frac{1}{n}\|f-f^*\|_2^2+\frac{2}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}|b_k(f-f^*)|$.

2. Если $\{b_k(f-f^*)\}_{k=0}^{\infty}\in l_p$ *для некоторого* $p\in[1,+\infty]$, *то*

$$\|A_nf-f^*\|_2^2\le 2\|\{b_k(f-f^*)\}\|_p n^{-\frac{1}{p}}.$$

3. Если ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}b_k(f-f^*)$ *сходится абсолютно, то мера* σ_{f-f^*} *абсолютно непрерывна с непрерывной (неотрицательной) плотностью* ρ; *при этом* $\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}b_k(f-f^*)e^{ikx}$ *для всех* $x\in(-\pi,\pi]$, *и, следовательно,* $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}b_k(f-f^*)=2\pi\rho(0)$. *Справедливо асимптотическое соотношение* (1), *причём для любого натурального* n

$$\|A_nf-f^*\|_2^2-2\pi\rho(0)n^{-1}=-\frac{1}{n^2}\sum_{|k|<n}|k|b_k(f-f^*)-\frac{1}{n}\sum_{|k|\ge n}b_k(f-f^*).$$

4. Если, более того, ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}kb_k(f-f^*)$ *сходится абсолютно, то, более того, плотность* ρ *меры* σ_{f-f^*} *непрерывно дифференциру-*

ема; при этом $\rho'(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} ikb_k(f-f^*)e^{ikx}$ *для всех* $x \in (-\pi,\pi]$, *и, следовательно,* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|b_k(f-f^*) = 2\pi(\rho')^c(0)$, *где* $(\rho')^c(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|b_k(f-f^*)e^{ikx}$ *— сопряжённая функция к* $\rho'(x)$. *Справедливо асимптотическое соотношение*

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = 2\pi\rho(0)n^{-1} - 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} + o(n^{-2}) \text{ при } n \to \infty,$$

причём для любого натурального n

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} = \frac{1}{n^2}\sum_{|k|\geq n}(|k|-n)b_k(f-f^*).$$

Замечание 4. Отметим, что В.П. Леоновым выписано[12] интегральное представление

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|b_k(f-f^*) = -\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\rho(x)+\rho(-x)-2\rho(0)}{4\sin^2\frac{x}{2}}dx$$

(в условиях и обозначениях п. 4 предыдущей теоремы). Из этого представления следует, в частности, что оба коэффициента ($2\pi\rho(0)$ и $2\pi(\rho')^c(0)$) в асимптотическом соотношении п. 4 теоремы 8 зануляются одновременно тогда и только тогда, когда $\rho \equiv 0$, т.е. когда $f - f^* \equiv 0$ п.в. (и сходимости $\|A_n f - f^*\|_2^2$ со скоростью $o(n^{-2})$ при $n \to \infty$ даже в условиях п. 4 предыдущей теоремы не бывает — ср. с предыдущими замечаниями об ограниченности диапазона скоростей).

Для некоторых типов динамических систем (например, системы бильярдного типа, системы Аносова) при надлежащем выборе функции f, по которой производится усреднение, удаётся получить оценки на скорости убывания корреляционных коэффициентов, оказывающиеся степенными или экспоненциальными. Теорема из предыдущего раздела с учётом таких частных случаев убывания $\{b_k(f-f^*)\}_{k=0}^{\infty}$ приводит нас к следующей ниже теореме. Известно[13], что оценки этой теоремы необратимы, т.е. здесь отсутствует критерий степенной скорости сходимости в терминах убывания корреляционных коэффициентов.

[12] Леонов В.П. О дисперсии временных средних стационарного случайного процесса // ТВП. 1961. Т. 6, № 1. С. 93–101.

[13] Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // УМН. 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.

Теорема 9 ([4]). *Пусть корреляционные коэффициенты со степенной скоростью стремятся к нулю, т.е. для некоторой положительной константы C при всех натуральных n выполнено неравенство $|b_n(f - f^*)| \le Cn^{-\gamma}$. Тогда:*

1. Если $0 \le \gamma < 1$, то для всех n

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \le \|f - f^*\|_2^2 n^{-1} + \frac{2C}{1-\gamma} n^{-\gamma} \le \left(\|f\|_2^2 + \frac{2C}{1-\gamma}\right) n^{-\gamma}.$$

2. Если $\gamma = 1$, то для всех n

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \le \|f - f^*\|_2^2 n^{-1} + 2C \frac{\ln n + \frac{n-1}{n}}{n} < \left(\|f\|_2^2 + 2C\right) \frac{\ln n + 1}{n}.$$

Если $\gamma > 1$, то мера σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна с непрерывной (неотрицательной) плотностью ρ; при этом $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f - f^*) = 2\pi\rho(0)$, т.е.

$$2\pi\rho(0) = \|f - f^*\|_2^2 + \sum_{|k|=1}^{\infty} b_k(f - f^*) \le$$
$$\le \|f - f^*\|_2^2 + \sum_{|k|=1}^{\infty} C|k|^{-\gamma} \le \|f\|_2^2 + 2C\tfrac{\gamma}{\gamma-1},$$

и справедливо асимптотическое соотношение (1), причём:

3. Если $1 < \gamma < 2$, то для всех $n \ge 2$

$$\left|\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1}\right| < 2C\left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2-\gamma}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) n^{-\gamma}.$$

4. Если $\gamma = 2$, то для всех $n \ge 2$

$$\left|\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1}\right| < 2C\left(\ln n + 2 + \frac{1}{n(n-1)}\right) n^{-2}.$$

5. Если $\gamma > 2$, то, более того, плотность ρ меры σ_{f-f^*} непрерывно дифференцируема; при этом $2\pi(\rho')^c(0) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |k| b_k(f - f^*)$, т.е. $|2\pi(\rho')^c(0)| \le 2C \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{1-\gamma} \le 2C\frac{\gamma-1}{\gamma-2}$. Справедливо асимптотическое соотношение

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 = 2\pi\rho(0)n^{-1} - 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} + o(n^{-2}) \text{ при } n \to \infty,$$

причём для всех $n \geq 2$

$$\left| \|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} \right| < \frac{2C}{\gamma - 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 n^{-\gamma}.$$

6. Если, более того, корреляционные коэффициенты убывают экспоненциально, т.е. $|b_n(f - f^*)| \leq Ae^{-Bn}$ для некоторых положительных констант A и B при всех натуральных n (что эквивалентно аналитичности плотности ρ), то

$$2\pi\rho(0) = \|f - f^*\|_2^2 + \sum_{|k|=1}^{\infty} b_k(f - f^*) \leq \|f\|_2^2 + \frac{2A}{e^B - 1},$$

$$2\pi(\rho')^c(0) = \sum_{|k|=1}^{\infty} |k| b_k(f - f^*), \text{ т.е. } |2\pi(\rho')^c(0)| \leq \frac{2A}{(e^B - 1)(1 - e^{-B})},$$

и для всех n $\left| \|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} \right| \leq$
$\leq 2A\frac{e^B}{e^B - 1}\left(1 + \frac{1}{e^B - 1} \cdot \frac{1}{n}\right)\frac{e^{-Bn}}{n}$.

Глава 3. Неравенства, связывающие между собой скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа

Возможность получения численных оценок скорости сходимости в теореме Биркгофа при наличии степенной оценки скорости сходимости в теореме фон Неймана следует из асимптотических результатов[14] для дискретного времени А.Г. Качуровского и уточняющих их результатов[15] В.Ф. Гапошкина.

В этой главе переработкой доказательства В.Ф. Гапошкина будет доказана теорема 13, уточняющая упомянутые результаты в направлении перехода от асимптотических оценок скорости сходимости в терминах "O" к алгебраическим неравенствам, дающим численную оценку этой скорости. В виде теоремы 14 будет получен также соответствующий аналог для случая непрерывного времени. Таким образом, теоремы 13 и 14 с учётом результатов обсуждавшегося в предыдущих главах позволяют получить численные оценки скорости сходимости в эргодической

[14]Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // УМН. 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.

[15]Гапошкин В. Ф. Несколько примеров к задаче об ε-уклонениях для стационарных последовательностей // ТВП. 2001. Т. 46, № 2. С. 370–375.

теореме Биркгофа по известному поведению в нуле меры σ_{f-f^*}, либо по известной скорости убывания корреляций.

Теорема 13 ([7]). *Пусть для любого натурального n выполнено неравенство $\|A_n f - f^*\|_2^2 \le Bn^{-\alpha}$, где B — некоторая положительная константа, $\alpha \in (0,2]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при всех натуральных $n \ge 2$ выполнено неравенство:*

$$P_n^\varepsilon = \lambda\left\{\sup_{k\ge n}|A_k f - f^*| \ge \varepsilon\right\} < \varphi(\alpha,n)B\varepsilon^{-2},$$

причём в зависимости от α:

1. Если $\alpha \in (0,1)$, то $\varphi(\alpha,n) = \frac{2^{1+\alpha}}{1-2^{-\alpha}}\left(1+\frac{1}{(1-2^{\frac{\alpha-1}{2}})^2}\right)n^{-\alpha}$.

2. Если $\alpha = 1$, то $\varphi(\alpha,n) = 8\frac{(1+\log_2 n)^2+3}{n}$.

3. Если $\alpha \in (1,2]$, то $\varphi(\alpha,n) = 8\left(1+\frac{\pi^2}{6}\frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3}\right)n^{-1}$.

Замечание 5. В условиях предыдущей теоремы при $\alpha = 2$ для всех $n \ge 2$ справедливо неравенство: $\lambda\left\{\sup\limits_{k\ge n}|A_k f - f^*| > \varepsilon\right\} < Bn^{-1}\varepsilon^{-2}$.

Теорема 14. *Пусть для любого $t > 0$ выполнено неравенство $\|A_t f - f^*\|_2^2 \le Bt^{-\alpha}$, где B — некоторая положительная константа, $\alpha \in (0,2]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при всех $t \ge 2$ выполнено неравенство:*

$$P_t^\varepsilon = \lambda\left\{\sup_{s\ge t}|A_s f - f^*| \ge \varepsilon\right\} < \varphi(\alpha,t)B\varepsilon^{-2},$$

причём в зависимости от α:

1. Если $\alpha \in (0,1)$, то $\varphi(\alpha,t) = \frac{3\cdot 2^\alpha}{1-2^{-\alpha}}\left(5+\frac{1}{(1-2^{\frac{\alpha-1}{2}})^2}\right)t^{-\alpha}$.

2. Если $\alpha = 1$, то $\varphi(\alpha,t) = 12\frac{(1+\log_2 t)^2+7}{t}$.

3. Если $\alpha \in (1,2]$, то $\varphi(\alpha,t) = 12\left(5+\frac{\pi^2}{6}\frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3}\right)t^{-1}$.

Глава 4. Связь полученных результатов с теорией стационарных в широком смысле стохастических процессов

В главе 4 приводятся определения необходимых стохастических процессов (стационарных в узком и широком смысле) и обсуждается взаимосвязь этих процессов с результатами предыдущих глав: оказывается, что теоремы 4, 6, 8, 9 и 13 имеют точные аналоги в классе стационарных в широком смысле стохастических процессов с дискретным временем. В классе стационарных в широком смысле стохастических процессов с непрерывным временем можно привести аналог теоремы 14, а также ряда теорем других авторов[16], играющих в случае непрерывного времени роль аналогичную роли теорем 4, 6, 8, 9 и 13 в случае дискретного времени.

В качестве примера приводится аналог теоремы 6 для стационарных в широком смысле процессов.

Теорема 15 ([4]). *Пусть* $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *— стационарный в широком смысле процесс (с конечным вторым моментом),* $\mathrm{E}X_n = 0$, $F(\lambda)$ *— спектральная функция,* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} X_k$, *и пусть* $\alpha \in [0, 2)$. *Тогда:*

1) Если для некоторой положительной константы A *при всех* $\delta \in (0, \pi]$ *выполняется неравенство* $F(\delta) - F(-\delta) \le A\delta^\alpha$, *то для любого натурального* n

при $\alpha \in [0,1)$: $\mathrm{D}\, S_n < A\pi^\alpha \left(\frac{2}{2-\alpha} n^{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - (\frac{2}{2-\alpha} + \right.$
$\left. + \frac{1}{1-\alpha} - 2) - n^{-\alpha}\right) < A\pi^\alpha (\frac{2}{2-\alpha} n^{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha})$;
при $\alpha = 1$: $\mathrm{D}\, S_n < A\pi(2n + \ln n - n^{-1}) < A\pi(2n + \ln n)$;
при $\alpha \in (1,2)$: $\mathrm{D}\, S_n < A\pi^\alpha \left(\frac{2}{2-\alpha} n^{2-\alpha} + (4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}) - \right.$
$\left. -(2 + \frac{1}{\alpha-1}) n^{1-\alpha} - n^{-\alpha}\right) < tA\pi^\alpha \left(\frac{2}{2-\alpha} n^{2-\alpha} + (4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1})\right)$.

2) Если для некоторой положительной константы B *при всех натуральных* n *выполняется неравенство* $\mathrm{D}\, S_n \le B n^{2-\alpha}$, *то для любого* $\delta \in (0, \pi]$

$$F(\delta) - F(-\delta) \le C\delta^{2-\alpha}, \text{ где } C = \begin{cases} \frac{\pi^{2-\alpha}}{4} B, & 0 \le \alpha < 1 \\ \frac{\pi^{2-\alpha}}{2^{3-\alpha}} B, & 1 \le \alpha < 2 \end{cases},$$

причём константа C *неулучшаема в том смысле, что её нельзя уменьшить.*

Аналог теоремы при $\alpha = 2$ *не имеет места, ни с какими константами, а степенного убывания* $\mathrm{D}\, S_n$ *(случай* $\alpha > 2$*) при* $X_n \not\equiv 0$ *просто не бывает.*

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Александру Григорьевичу Качуровскому за постановку задач, ценные обсуждения и постоянное внимание к работе.

---

[16] Джулай Н. А., Качуровский А. Г. Константы оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1039–1052.

Работы автора по теме диссертации

[1] Седалищев В. В. О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана // Материалы Междунар. конф. «Совр. проблемы анализа и геометрии 2009». Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2009. С. 102.

[2] Седалищев В. В. Константы оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана // Материалы XLVIII Междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. Новосибирск: Новосибирский гос. ун-т, 2010. С. 88.

[3] Качуровский А. Г., Седалищев В. В. О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 5. С. 756–763. Англ. пер.: Kachurovskii A. G., Sedalishchev V. V. On the constants in the estimates of the rate of convergence in von Neumann's ergodic theorem // Math. Notes. 2010. V. 87, N 5. P. 720–727.

[4] Качуровский А. Г., Седалищев В. В. Константы оценок скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 8. С. 21–40. Англ. пер.: Kachurovskii A. G., Sedalishchev V. V. Constants in estimates for the rates of convergence in von Neumann's and Birkhoff's ergodic theorems // Sbornik: Mathematics. 2011. V. 202, N 8. P. 1105–1125.

[5] Седалищев В. В. О неравенствах, связывающих между собой скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа // Материалы Междунар. молодёжного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2011» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2011. – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см.

[6] Качуровский А. Г., Седалищев В. В. Неравенства, позволяющие оценивать скорости сходимости в эргодических теоремах // Тезисы докладов Междунар. школы-конференции по геометрии и анализу. Кемерово, 19–26 июня 2011. [Электронный ресурс] — Кемерово: КемГУ, 2011. Номер гос. рег. 0321102235.

[7] Качуровский А. Г., Седалищев В. В. Неравенства, позволяющие оценивать скорости сходимости в эргодических теоремах // Вестник КемГУ. 2011. № 3/1. С. 250–254.

Подписано в печать 23.12.2011 г.
Формат 60 × 84 1/16.
Заказ № 331
Офсетная печать. Объём 1 п.л.
Тираж 100 экз.
Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.